# La fórmula de Eisenbud-Khimshiashvili-Levine en $\mathbb{A}^1$-homotopía

**Jorge Alfredo Álvarez Contreras**

Gabriela Guzmán (CIMAT)  Ángel Zaldívar (UDG)

## Resumen

En su artículo [KW19], Jesse Leo Kass y Kirsten Wickelgren resuelven una pregunta hecha por Eisenbud en [Eis78] acerca del significado geométrico de una cierta forma bilineal que, en el caso real o complejo, calcula el grado local de Brouwer de una función polinomial en un punto aislado.

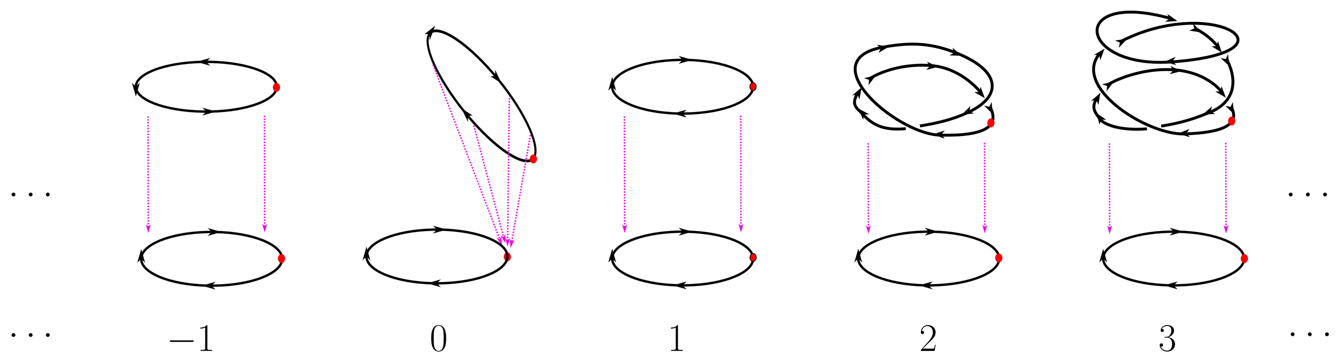
## El grado local de Brouwer

**Definición 1** (Grado de Brouwer). *Si $X, Y$ son variedades compactas orientadas conexas de dimensión $n$, el grado de Brouwer de $f$ es la imagen del $1 \in \mathbb{Z}$ bajo la función inducida*

$$f_*\colon \mathbb{Z} \cong H_n(X) \to H_n(Y) \cong \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Para $X = Y = S^n$, el grado de Brouwer establece una biyección

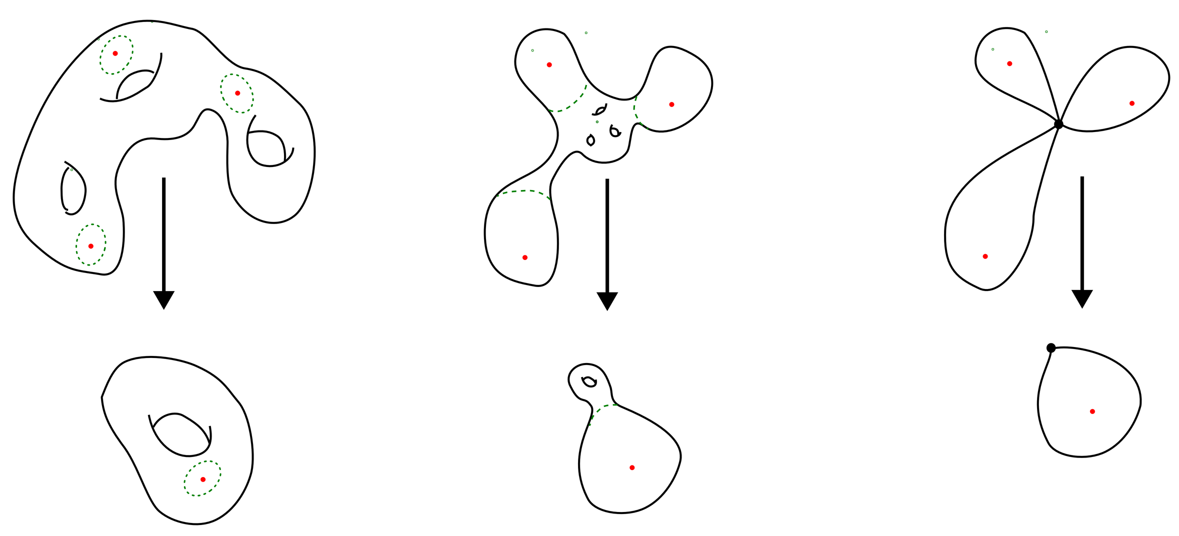
$$\deg\colon [S^n, S^n]_* \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}. \tag{2}$$




**Definición 2** (Grado local de Brouwer). *Si $X, Y$ son de dimensión $n$, $f\colon X \to Y$, $y \in Y$ es un punto y $x \in f^{-1}(y)$ es un punto aislado, el grado local de $f$ en $x$ es el grado de $f$ restringida a discos suficientemente pequeños alrededor de $x$ y $y$.*

**Teorema 1** (Brouwer). *Si $y \in Y$ tiene fibra finita $f^{-1}(y)$, el grado de $f$ es la suma de los grados locales sobre la fibra:*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f). \tag{3}$$



**Teorema 2** (Eisenbud-Levine, Khimshiashvili, 1977). *Sea $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$. Si $f\colon k^n \to k^n$ es lisa (resp. analítica) con $f(0) = 0$ y el álgebra $Q_0 = \mathcal{O}_0(k^n)/(f_1, \dots, f_n)$ tiene dimensión finita sobre $k$, entonces $0 \in f^{-1}(0)$ es un punto aislado y*

$$\deg_0(f) = \operatorname{sgn}(\beta) \quad (k = \mathbb{R}), \tag{4}$$
$$\deg_0(f) = \operatorname{rank}(\beta) \quad (k = \mathbb{C}), \tag{5}$$

*donde $\beta$ es la forma bilineal asociada a cualquier función lineal $\eta\colon Q_0(f) \to k$ con $\eta(J_0) = 1$.*

**Definición 3** (Eisenbud, 1977). *Sea $f\colon \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ una función polinomial con $f(0) = 0$ y $Q_0(f) = k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_0}/(f_1, \dots, f_n)$ finita sobre $k$. El "grado local" (ad-hoc) de $f$ en $0$ es la clase*

$$w_0(f) \in \mathrm{GW}(k) \tag{6}$$

*de la forma bilineal $\beta$ asociada a cualquier función lineal $\eta\colon Q_0(f) \to k$ con $\eta(E_0) = 1$, donde $E_0 = \det(e_{ij}(X))$ es el determinante de*

$$f_i(X) = f_i(0) + \sum_j e_{ij}(X) X_j \tag{7}$$

*En característica $0$, es suficiente tomar $e_{ij} = \partial f_i / \partial X_j$.*

## La solución al problema de Eisenbud: $\mathbb{A}^1$-homotopía

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Top} \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathrm{hTop} \\ \mathrm{Top} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_S \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathrm{Spc}_S \\ & \mathrm{Sm}_S \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

| hTop | $\mathrm{Spc}_S$ |
|---|---|
| $[0,1]$ | $\mathbb{A}^1$ |
| cubiertas abiertas | cubiertas de Nisnevich |
| $S^n$ | $S^{p,q} = S^{p-q} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge q}$ |

(8)

$$S^{n,0} = S^n \tag{9}$$
$$S^{2n-1,n} = \mathbb{A}^n - \{0\}, \tag{10}$$
$$S^{2n,n} = \mathbb{P}^n / \mathbb{P}^{n-1}. \tag{11}$$

En 2002, Morel construyó un isomorfismo análogo al grado de Brouwer

$$\deg^{\mathbb{A}^1}\colon [S^{2n,n}, S^{2n,n}]_* \xrightarrow{\cong} \mathrm{GW}(k), \tag{12}$$

donde $\mathrm{GW}(k)$ es el grupo de Grothendieck-Witt de formas bilineales simétricas no degeneradas.

*Ejemplo* 1.
- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$.

**El $\mathbb{A}^1$-grado local de Brouwer** En 2017, Kass y Wickelgren dieron una definición geométrica del grado local de Brouwer de una función polinimial alrededor de un cero aislado, con valores en $\mathrm{GW}(k)$ y mostraron que, en efecto, coincide con la clase de Eisenbud-Khimshiashvili-Levine.

$$\begin{tikzcd} \frac{\mathbb{P}^n_k}{\mathbb{P}^{n-1}_k} \arrow[r, "\text{colapso}"] \arrow[d, "\simeq"] & \frac{U}{U-\{x\}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"] & \frac{\mathbb{A}^n}{\mathbb{A}^n-\{y\}} \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Th}(\mathbb{A}^n_k) \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend right, "f_x"'] & \mathrm{Th}(\mathbb{A}^n_{k(x)}) \arrow[r, dotted, "f_{\mathrm{Th}}"] & \mathrm{Th}(\mathbb{A}^n_k) \end{tikzcd} \tag{13}$$

**Caso étale** Usando un resultado de Hoyois (2014), Kass y Wickelgren identifican $f_x$ como la traza de $\mathrm{Th}(df(x))$, en el sentido de objetos dualizables en categorías monoidales:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Th}(\mathbb{A}^n_{k(x)}) \arrow[r, dotted, "\mathrm{Th}(df(x))"] \arrow[dr, "f"] & \mathrm{Th}(\mathbb{A}^n_{k(x)}) \arrow[d, dotted] \\ \mathbb{S}^n \arrow[u] \arrow[r, "f_x"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \wedge D \arrow[r, "f \wedge \mathrm{id}"] & E \wedge D \arrow[d] \\ I \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{Tr}(f)"'] & I. \end{tikzcd} \tag{14}$$

Entonces Kass y Wickelgren calculan

$$\deg_x^{\mathbb{A}^1}(f) = \mathrm{Tr}_{k(x)/k}\langle J_x \rangle = w_x(f), \tag{15}$$

donde $w_x(f)$ es la forma local de Scheja-Storch de $f$ en $x$, que generaliza a la forma EKL. Para esto, usan el siguiente resultado.

*Ejemplo* 2. Si $(L : k)$ una extensión finita y separable, $\mathrm{Th}_L(\mathbb{A}^n_L)$ es dualizable en $\mathbf{SH}(k)$. Dado un automorfismo $\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}^n_L)$, la traza del endomorfismo $\mathrm{Th}(\phi)\colon \mathrm{Th}_L(\mathbb{A}^n_L) \to \mathrm{Th}_L(\mathbb{A}^n_L)$ es

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Th}(\phi)) = \mathrm{Tr}_{L/k}\langle \det \phi \rangle \tag{16}$$

donde $\langle \det \phi \rangle \in \mathrm{GW}(L)$.

## Reducción al caso finito y étale

La función $f$ es étale en los puntos $x$ con $\det J_x \neq 0$, los cuales forman un abierto de Zariski de $\mathbb{A}^n$. Como los abiertos de Zariski son densos, deberíamos poder perturbar ligeramente la ecuación

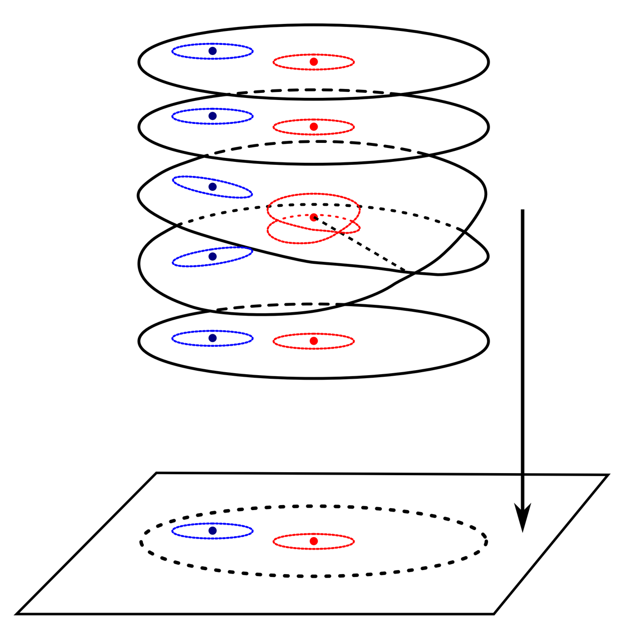
$$f(x) = y \tag{17}$$

para pasar a una ecuación

$$f(x') = y' \tag{18}$$

donde $y'$ sigue siendo racional, pero ahora $x'$ es un punto étale de $f$.

En realidad, si $x$ tiene multiplicidad $m$, deberíamos esperar que, al perturbar $f(x) = y$, $x$ se separe en $m$ puntos étales $x'_1, \dots, x'_r$ en la fibra sobre $y'$.



Sin embargo, para una función polinomial arbitraria $f$, la perturbación de los invariantes no se puede tener bajo control. Se puede lograr un control razonable cuando $f$ se puede extender a un morfismo finito $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Kass y Wickelgren mostraron que siempre se puede deformar $f$ sin cambiar sus invariantes en $x$, de modo que la $f$ perturbada

- tiene el mismo grado de Brouwer en $x$.
- tiene la misma álgebra local en $x$.
- tiene el mismo elemento distinguido del soclo en $x$.

pero, además, $f$ se puede extender a $F\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tal que

- $F$ es finito, plano y con $\operatorname{Frac} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \subseteq \operatorname{Frac} F_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ de grado coprimo a $\operatorname{char} k$.
- $F$ es étale en $F^{-1}(y) - \{x\}$
- $F^{-1}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$.

En este caso, la finitud de $f$ permite construir una forma global $\tilde{w}(f)$ tal que

$$\tilde{w}(f) = \sum_{x' \in f^{-1}(y')} w_x(f), \qquad \forall y' \in \mathbb{A}^n_k(k), \tag{19}$$

y la extensión $F$ induce $\bar{F}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que

$$\deg^{\mathbb{A}^1}(\bar{F}) = \sum_{x' \in f^{-1}(y')} \deg_{x'}^{\mathbb{A}^1}(f), \qquad \forall y' \in \mathbb{A}^n_k(k). \tag{20}$$

En particular, esto implica que las sumas del lado derecho son constantes sobre $y'$. Finalmente, Kass y Wickelgren muestran que siempre hay *valores regulares* $y'$, i.e. tales que $f$ es étale en cada punto $x' \in f^{-1}(y')$.

**Teorema 3** (Kass, Wickelgren, 2017). *Si $f\colon \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ es polinomial con $f(0) = 0$ y $Q_0(f)$ finita sobre $k$, entonces*

$$\deg_0^{\mathbb{A}^1}(f) = w_0(f), \tag{21}$$

## Referencias

[KW19] Jesse Leo Kass and Kirsten Wickelgren. "The class of Eisenbud-Khimshiashvili-Levine is the local $\mathbb{A}^1$-Brouwer degree". In: *Duke Math. J.* 3 (2019).

[Eis78] David Eisenbud. "An algebraic approach to the topological degree of a smooth map". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 5 (1978).