



La K-teoría de Milnor y sus conjeturas

Jorge Alfredo Álvarez Contreras

Asesores: Gabriela Guzmán (CIMAT)

Luis Ángel Zaldívar Corichi (UDG)



• El anillo de Grothendieck-Witt

Sea F un campo. Un espacio bilineal es un F -espacio vectorial V equipado con una forma bilineal simétrica $B: V \times V \rightarrow F$. Un espacio cuadrático V de dimensión finita es no degenerado (o regular) si la función lineal $\hat{B}: V \rightarrow V^*$ dada por $\hat{B}(v) = B(v, -)$, es un isomorfismo.

El grupo de Grothendieck-Witt El grupo de Grothendieck-Witt de F es el grupo abeliano asociado al monoide de clases de isometría de espacios regulares

$$\text{GW}(F) = (\{(V, B) \mid \text{espacios bilineales}\} / \sim_{\text{isom}})^{\text{gp}}. \quad (1)$$

En otras palabras, grupo de Grothendieck-Witt clasifica las formas cuadráticas no degeneradas sobre F . Está generado por símbolos $\langle a \rangle$ con $a \in F^*$, sujetos a las relaciones

$$\begin{cases} \langle a^2 \rangle = 1 \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a + b \rangle + \langle ab(a + b) \rangle. \end{cases} \quad (2)$$

El símbolo $\langle a \rangle$ corresponde al espacio vectorial $V = F$ equipado con la forma cuadrática $q(x) = ax^2$. Para cualquier espacio bilineal, su clase en $\text{GW}(F)$ es de la forma $\langle a_1, \dots, a_n \rangle := \langle a_1 \rangle + \dots + \langle a_n \rangle$. La multiplicación $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$ convierte a $\text{GW}(F)$ en un anillo.

El plano hiperbólico y el anillo de Witt El anillo $\text{GW}(F)$ contiene al ideal generado por $h = \langle 1, -1 \rangle$, el cual controla gran parte de la estructura del anillo. El elemento h se conoce como el *plano hiperbólico* y sus múltiplos enteros forman un ideal de $\text{GW}(F)$. El cociente $W(F) = \text{GW}(F)/(h)$ se conoce como el anillo de Witt.

Invariantes de isometría Podemos distinguir espacios bilineales usando invariantes como:

- La dimensión de $\langle a_1, \dots, a_m \rangle - \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \text{GW}(F)$ es $m - n \in \mathbb{Z}$. La dimensión de una clase $[V]$ en $W(F)$ solo está bien definida módulo 2, ya que $\dim h = 2$. La denotamos como $e_0(V) \in \mathbb{Z}/2$. El núcleo $I = I(F)$ de este morfismo $e_0: W(F) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ se conoce como el *ideal fundamental* de $W(F)$. Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{GW}(F) & \xrightarrow{\dim} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(F) & \longrightarrow & W(F) \xrightarrow{e_0} \mathbb{Z}/2, \end{array} \quad (3)$$

Nótese que $W/I \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$.

- El determinante $\det: \text{GW}(F) \rightarrow F^*/(F^*)^2$ está definido por $\det(\langle a \rangle) = a$. No se puede extender a $W(F)$ porque $\det(h) = -1$, pero se puede definir el *discriminante* $\text{disc}: W(F) \rightarrow F^*/(F^*)^2$ como $\text{disc}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = (-1)^{n(n-1)/2} (a_1 \cdots a_n)$. Esta es solo una función de conjuntos, pero define un homomorfismo de grupos si la restringimos al ideal fundamental $I = I(F)$. De hecho, el morfismo $e_1: I \rightarrow F^*/(F^*)^2$ que obtenemos, es suprayectivo y tiene núcleo I^2 . Luego, $I/I^2 \xrightarrow{\sim} F^*/(F^*)^2$.
- El álgebra de Clifford $\text{Cl}(V, B)$ de un espacio bilineal (V, B) de dimensión par (en I) es una F -álgebra simple central isomorfa a su álgebra opuesta, así que obtenemos un elemento del subgrupo de 2-torsión $\text{Br}(F)_2$ del grupo de Brauer $\text{Br}(F)$ de F . Al restringir esta función a I^2 , obtenemos un morfismo suprayectivo $e_2: I^2 \rightarrow \text{Br}(F)_2$, conocido como el invariante de Clifford, cuyo núcleo es I^3 . Luego, $I^2/I^3 \xrightarrow{\sim} \text{Br}(F)_2$.

• La K-teoría de Milnor y sus conjeturas

Los tres grupos de arriba coinciden con los tres primeros grupos de cohomología de Galois de F con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$, es decir, los invariantes e_0, e_1, e_2 inducen isomorfismos

$$\begin{array}{lll} W/I & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2 \simeq H^0(G_F, \mathbb{Z}/2), \\ I/I^2 & \xrightarrow{\sim} & F^*/(F^*)^2 \simeq H^1(G_F, \mathbb{Z}/2), \\ I^2/I^3 & \xrightarrow{\sim} & \text{Br}(F)_2 \simeq H^2(G_F, \mathbb{Z}/2). \end{array} \quad (4)$$

Esta observación sugiere que el anillo graduado

$$\text{Gr}_I(W(F)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n / I^{n+1} \quad (5)$$

debería coincidir con el anillo de cohomología de Galois de F .

La K-teoría de Milnor En su artículo [Mil70], Milnor propone un programa para construir el isomorfismo deseado: su idea es demostrar dos conjeturas acerca del álgebra graduada

$$K_*^M(F) = \frac{T(K_1(F))}{(l(a) \otimes l(1-a) \mid a \neq 0, 1)}, \quad (6)$$

que ahora conocemos como *el anillo de K-teoría de Milnor*. Aquí, $K_1(F) = \{l(a) \mid a \in F^*\}$ denota al grupo F^* , visto como $\mathbb{Z}$ -módulo aditivo y $T(K_1(F))$ es su álgebra tensorial con coeficientes enteros. Milnor se refiere a su definición como algo “puramente ad-hoc”, que concuerda con los primeros tres grupos de K -teoría de F :

$$\begin{cases} K_0(F) \simeq \mathbb{Z}, \\ K_1(F) \simeq F^*, \\ K_2(F) \simeq (F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^*) / (a \otimes (1-a)). \end{cases} \quad (7)$$

Las conjeturas de Milnor La K -teoría de Milnor actúa como un puente entre el anillo de cohomología $H^*(G_F, \mathbb{Z}/2)$ y el anillo graduado $\text{Gr}_I(W(F))$. Los cocientes $K_n^M(F)/2$ para $n = 0, 1, 2$ coinciden con los grupos de (4). En particular, tenemos isomorfismos

$$I/I^2 \xleftarrow{\iota_1} K_1^M(F)/2 \xrightarrow{\eta_1} H^1(G_F, \mathbb{Z}/2), \quad (8)$$

que identifican a los tres grupos con $F^*/(F^*)^2$. Milnor nota que las imágenes de estos morfismos en $\text{Gr}_I(W(F))$ y en $H^*(G_F, \mathbb{Z}/2)$ satisfacen las relaciones de la presentación de $K_*^M(F)$, así que determinan morfismos de anillos graduados

$$\text{Gr}_I(W(F)) \xleftarrow{\iota} K_*^M(F)/2 \xrightarrow{\eta} H^*(G_F, \mathbb{Z}/2). \quad (9)$$

La *conjetura de Milnor sobre el símbolo de Galois* es la afirmación de que ν es un isomorfismo. La afirmación para η se llama la *conjetura de Milnor en formas cuadráticas*. Ambas fueron demostradas en 1996 usando $\mathbb{A}^1$ -homotopía: la primera por Vladimir Voevodsky y la segunda por Orlov, Vishik y Voevodsky.

• La K-teoría de Milnor-Witt

En 2004, Fabien Morel y Mike Hopkins definen la *K-teoría de Milnor-Witt* como el anillo graduado $K_*^{MW}(F)$ generado aditivamente por un elemento $[u]$ en grado $+1$ para cada $u \in F^*$ y un elemento η de grado -1 , sujetos a las relaciones

$$\begin{cases} [a][1-a] = 0 \\ [ab] = [a] + [b] + \eta[a][b] \\ \eta[a] = [a]\eta \\ h\eta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde $h = 2 + \eta[-1]$. La parte de grado cero es justamente $K_0^{MW}(F) = W(F)$: la correspondencia está dada por $\langle a \rangle = \eta[a] + 1$. Además, $[1] = 0$, $\langle 1 \rangle = 1$, $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$ y el espacio hiperbólico es justamente $h = \langle 1, -1 \rangle$.

K-teoría de Milnor y K-teoría de Witt La K -teoría de Milnor se puede recuperar como $K_*^M(F) = K_*^{MW}(F)/(\eta)$, ya que al imponer la relación $\eta = 0$, el símbolo $[a]$ corresponde a $l(a)$. Por otro lado, la K -teoría de Witt se define como el cociente $K_*^W(F) = K_*^{MW}(F)/(h)$, cuyo grado cero es $K_0^W(F) = W(F)$.

Nótese que al anular η , el plano hiperbólico $h = \langle 1, -1 \rangle = 2 + \eta[-1]$ cae en $2 \in K_*^M(F)$ y, por lo tanto, se anula en $K_*^M(F)/2$. Luego, tenemos un morfismo inducido $K_*^W(F) \rightarrow K_*^M(F)/2$, cuyo núcleo es exactamente el ideal (η) . La parte en grado 0 de este ideal es el ideal fundamental $I(F) \subseteq W(F)$, así que el diagrama (3) es exactamente la parte en grado cero del diagrama de anillos graduados

$$\begin{array}{ccc} K_*^{MW}(F) & \longrightarrow & K_*^M(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\eta) & \longrightarrow & K_*^W(F) \longrightarrow K_*^M(F)/2 \end{array} \quad (11)$$

Morel construye un isomorfismo

$$K_*^W(F) \xrightarrow{\sim} I^*(F) \quad (12)$$

entre la K -teoría de Witt y el anillo graduado $I^*(F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n(F)$, donde $I^n(F) = W(F)$ para $n \leq 0$. Al anular η en ambos lados, se recupera la conjetura de Milnor en formas cuadráticas:

$$K_*^M(F)/2 \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_I(W(F)). \quad (13)$$

Relaciones con $\mathbb{A}^1$ -homotopía En la categoría homotópica de F , además de las esferas simpliciales S^n , tenemos una dimensión de esferas algebraicas generadas por el círculo de Tate $\mathbb{G}_m$. Morel demuestra que, para $n \geq 2$; $i \geq 1$; $m, j \geq 0$ tenemos

$$[S^m \wedge \mathbb{G}_m^j, S^n \wedge \mathbb{G}_m^i]_{*, H(F)} = \begin{cases} 0 & m < n, \\ K_{i-j}^{MW}(F) & m = n. \end{cases} \quad (14)$$

En particular, para $m = n \geq 2$ y $j = i \geq 1$,

$$[S^n \wedge \mathbb{G}_m^i, S^n \wedge \mathbb{G}_m^i]_{*, H(F)} = K_0^{MW}(F) = W(F). \quad (15)$$

Cuando $i = n$, tenemos $S^n \wedge \mathbb{G}_m^n \simeq (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}$, así que

$$[(\mathbb{P}^1)^{\wedge n}, (\mathbb{P}^1)^{\wedge n}]_{*, H(F)} = W(F) \quad (16)$$

para $n \geq 2$. Esto es un análogo al resultado $[S^n, S^n]_* \simeq \mathbb{Z}$ para $n \geq 1$, en la categoría homotópica de espacios topológicos. De hecho, $\text{GW}(F) = \mathbb{Z}$ para cualquier campo cuadráticamente cerrado.

Referencias

- [Mil70] John W. Milnor. “Algebraic K-Theory and Quadratic Forms”. In: 1970. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:234489840>.
- [Dég23] Frédéric Déglise. *Notes on Milnor-Witt K-theory*. 2023. arXiv: [2305.18609](https://arxiv.org/abs/2305.18609) [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2305.18609>.
- [Dug04] Daniel Dugger. *Notes on the Milnor conjectures*. 2004. arXiv: [math/0408436](https://arxiv.org/abs/math/0408436) [math.AT]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0408436>.
- [Mor06] Fabien Morel. “ $\mathbb{A}^1$ -algebraic topology”. In: 2006. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:209451876>.
- [GS17] Philippe Gille and Tamás Szamuely. “Central Simple Algebras and Galois Cohomology”. In: 2017. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:209824684>.