¿A las cuántas vueltas se echa un perro?
(en $\mathbb{A}^1$-homotopía)

Jorge Alfredo Álvarez Contreras* Asesora: Gabriela Guzmán**

*Universidad de Guadalajara

**CIMAT Guanajuato

57 Congreso nacional de la SMM
Durango 2024

Plan

1. Homotopía de espacios topológicos
2. $\mathbb{A}^1$-homotopía de esquemas
3. $\mathbb{A}^1$-homotopías elementales
4. La necesidad de $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$

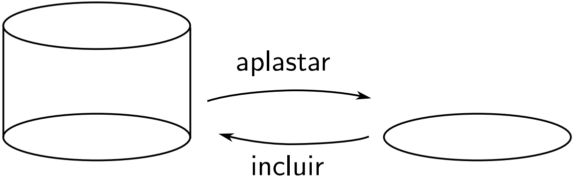
1. Homotopía de espacios topológicos

Topología

En topología general, estudiamos espacios topológicos.
Espacios topológicos X, Y se consideran como "el mismo espacio" cuando hay un homeomorfismo entre ellos: esto es, un par de funciones continuas $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, tales que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
Clasificar espacios topológicos salvo homeomorfismo es prácticamente imposible. Aún para espacios finitos el problema es enorme.

Topología algebraica

La topología algebraica estudia los espacios a través de invariantes algebraicos (grupos, anillos, categorías...).
El punto es relajar nuestro concepto de "ser el mismo espacio" de manera que sea más fácil de trabajar.



Para formalizar estas ideas, introducimos el concepto de homotopía.

Homotopía

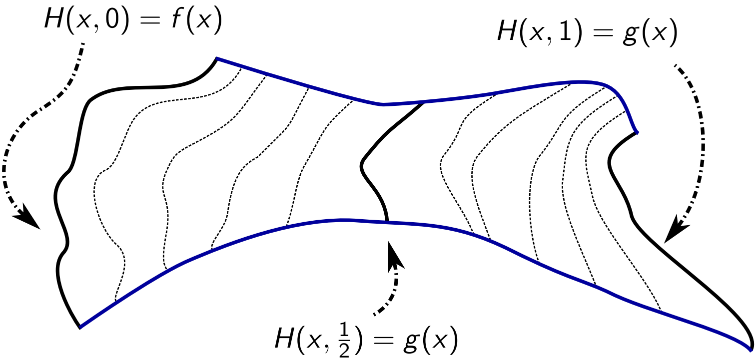
Definición

Sean $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ *dos funciones continuas. Una homotopía* $H\colon f \rightsquigarrow g$ *es una función continua* $H\colon X \times I \to Y$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \times I \arrow[r, "H"] & Y \\ X, \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{es decir:} \quad \begin{cases} H(x,0) = f(x), \\ H(x,1) = g(x). \end{cases} \tag{1}$$

Una equivalencia homotópica es un par de funciones continuas $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Homotopía



La categoría **Top** tiene como objetos a los espacios topológicos y como morfismos de X a Y las funciones continuas

$$C(X, Y). \tag{2}$$

La categoría homotópica $\mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$ tiene los mismos objetos que **Top** pero los morfismos de X a Y son *clases de homotopía* de funciones continuas:

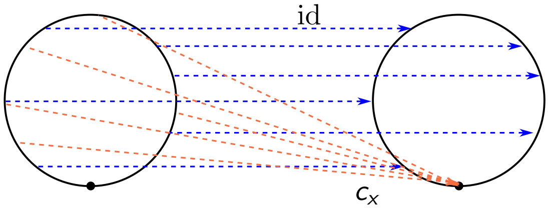
$$[X, Y] = C(X, Y)/\simeq . \tag{3}$$

También podemos considerar espacios equipados con un punto distinguido y funciones $C(X, Y)_*$ que preserven este punto. Denotamos como $[X, Y]_*$ al conjunto de sus clases de homotopía.

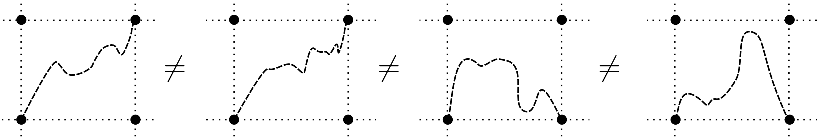
La categoría homotópica está muy lejos de ser trivial. Quizá el primer ejemplo de funciones no homótopas es el par

$$c_x, \mathrm{id}\colon S^1 \rightrightarrows S^1, \tag{4}$$

donde id es la identidad de S^1 y c_x es la función constante que manda todo S^1 a un punto elegido x.

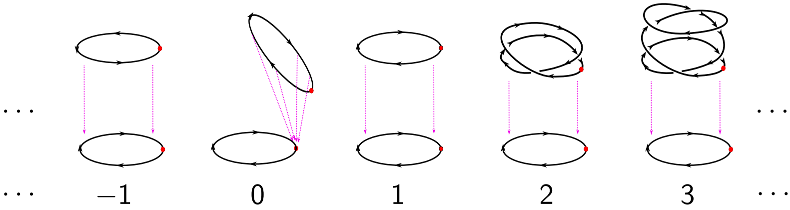


Nótese que el conjunto $C(S^1, S^1)_*$ no es numerable



mientras que las *clases de homotopía* son relativamente sencillas de controlar: Brouwer construyó una biyección

$$\deg\colon [S^1, S^1]_* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}. \tag{5}$$



Más aún, la concatenación de caminos convierte a $[S^1, S^1]_*$ en un grupo, y la función de grado

$$\deg\colon [S^1, S^1]_* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \tag{6}$$

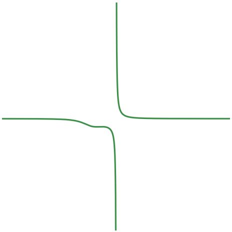
es un isomorfismo de grupos.
Más generalmente, para cada n tenemos un isomorfismo de grupos

$$\deg\colon [S^n, S^n]_* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Dada una función continua $f\colon S^n \to S^n$, podemos preguntar: ¿cuántas vueltas da S^n sobre sí misma al aplicarle f?
Este resultado nos dice que la respuesta siempre es un número entero, el cual determina completamente a f (salvo homotopía).

2. $\mathbb{A}^1$-homotopía de esquemas

El gran éxito de la topología algebraica en la clasificación de espacios es innegable.
Idea: desarrollar una teoría de homotopía para variedades algebraicas.



Cuando trabajamos con variedades algebraicas, solo permitimos funciones definidas por polinomios.

Problemas:

- Un campo arbitrario no tiene una topología tan flexible como las de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
- El intervalo $I = [0, 1]$ no es una variedad algebraica.
- Las funciones polinomiales son demasiado rígidas.
- No existen los cocientes que necesitamos.

La teoría de $\mathbb{A}^1$-homotopía fue desarrollada por Fabien Morel y Vladimir Voevodsky [Voe98; MV99].

- Voevodsky resolvió las conjeturas de Milnor sobre un campo.
- Morel logró una clasificación de haces vectoriales sobre esquemas lisos.

Idea: agrandar la categoría de variedades

$$\mathbf{Var}_k \to \mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}. \tag{8}$$

Así como en **Top** tenemos una familia de esferas

$$S^0, S^1, S^2, S^3, S^4, S^5, \dots \tag{9}$$

en $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$ tenemos una familia de esferas de dos parámetros

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \iddots \\
 & & & & & S^{5,5} & \iddots \\
 & & & & S^{4,4} & S^{5,4} & \iddots \\
 & & & S^{3,3} & S^{4,3} & S^{5,3} & \iddots \\
 & & S^{2,2} & S^{3,2} & S^{4,2} & S^{5,2} & \iddots \\
 & S^{1,1} & S^{2,1} & S^{3,1} & S^{4,1} & S^{5,1} & \iddots \\
S^{0,0} & S^{1,0} & S^{2,0} & S^{3,0} & S^{4,0} & S^{5,0} & \dots
\end{array} \tag{10}$$

Sin embargo, la construcción de $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$ es altamente no trivial:

- gavillas simpliciales
- categorías modelo
- localizaciones de Bousfield
- ∞-categorías
- localizaciones simpliciales

Preguntas:

- ¿en verdad necesitamos toda esta maquinaria?
- ¿qué tanto podemos hacer sin salirnos de $\mathbf{Var}_k$?

3. $\mathbb{A}^1$-homotopías elementales

Definición

Sean $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ morfismos de variedades algebraicas. Una $\mathbb{A}^1$-homotopía elemental $H\colon f \rightsquigarrow g$ es un morfismo $H\colon X \times \mathbb{A}^1 \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, "H"] & Y \\ X, \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \textit{es decir:} \quad \begin{cases} H|_{X\times\{0\}} = f, \\ H|_{X\times\{1\}} = g. \end{cases} \tag{11}$$

La relación no es transitiva, pero podemos intentar trabajar con ella. Por ejemplo, ¿podemos clasificar los morfismos de la esfera en sí misma, salvo homotopía elemental?

De las esferas $S^{p,q} \in \mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$, pocas son variedades. Afortunadamente, una de las más importantes sí lo es.

$$S^{2,1} = \mathbb{P}^1. \tag{12}$$

¿Por qué $(2,1)$?

$$S^{2,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 \cong_{\mathbf{Top}} S^2, \tag{13}$$

$$S^{2,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{RP}^1 \cong_{\mathbf{Top}} S^1. \tag{14}$$

Podemos estudiar el conjunto de endomorfismos

$$[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1]_* \tag{15}$$

salvo $\mathbb{A}^1$-homotopía elemental. El punto distinguido es el infinito.

En general, un morfismo $f \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ está dado por

$$f([x:y]) = [A(x,y) : B(x,y)], \tag{16}$$

donde A, B son polinomios homogéneos del mismo grado que no se anulan a la vez. El morfismo f fija al punto en el infinito $[1:0]$ si, y solo si, $B(x,0) = 0$, i.e. si B es múltiplo de y. Por ejemplo:

$$f([x:y]) = [x^2 + xy - y^2 : 2xy + y^2]. \tag{17}$$

En la carta afín $\{[x:1] \mid x \in k\}$, f corresponde a una función racional

$$f(x) = \frac{A(x,1)}{B(x,1)} = \frac{x^2 + x - 1}{2x}. \tag{18}$$

Podemos describir los morfismos $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ como pares de polinomios (A, B) tales que

- A es mónico de grado n
- B es un polinomio de grado estrictamente menor a n
- A y B no tienen factores comunes de grado ≥ 1.

Si $A = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y $B = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$, la condición de que A y B no tengan factores comunes es equivalente a que el resultante

$$\mathrm{res}_{n,n}(A, B) = \det \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & & \\ a_{n-1} & \ddots & & b_{n-1} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & 0 \\ a_0 & \ddots & a_{n-1} & b_0 & \ddots & b_{n-1} \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

sea distinto a cero.

El esquema que parametriza a estos pares de polinomios (A, B), donde A tiene grado n, es el subesquema abierto

$$\mathcal{F}_n \subseteq \operatorname{Spec} k[a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}] \tag{20}$$

dado por el complemento de la ecuación

$$\operatorname{res}_{n,n}(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0) = 0. \tag{21}$$

Entonces el esquema $\mathcal{F} :\equiv \coprod_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ satisface

$$\mathbf{Var}_k(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)_* \cong \mathcal{F}(k) \tag{22}$$

$$\mathbf{Var}_k(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1)_* \cong \mathcal{F}(k[t]). \tag{23}$$

Ejemplo

Si $b_0 \in k^\times$*, la función racional*

$$\frac{x^n + a_{n-1}tx^{n-1} + \cdots + a_1 tx + a_0 t}{b_0} \in \mathcal{F}_n(k[t]) \tag{24}$$

exhibe una $\mathbb{A}^1$*-homotopía elemental*

$$\frac{x^n}{b_0} \rightsquigarrow \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_0} \in \mathcal{F}_n(k), \tag{25}$$

Ejemplo

Si $b_0 \in k^\times$, *la función racional*

$$\frac{x^n}{b_{n-1}tx^{n-1} + \cdots + b_1 tx + b_0} \in \mathcal{F}_n(k[t]), \tag{26}$$

exhibe una $\mathbb{A}^1$*-homotopía elemental*

$$\frac{x^n}{b_0} \rightsquigarrow \frac{x^n}{b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \in \mathcal{F}_n(k), \tag{27}$$

Estructura de monoide

El esquema $\mathcal{F}$ es un monoide graduado:

$$\mathcal{F}_{n_1} \times \mathcal{F}_{n_2} \to \mathcal{F}_{n_1+n_2}. \tag{28}$$

Sea R una k-álgebra. Dado un elemento $(A_i, B_i) \in \mathcal{F}_{n_i}(R)$, existen únicos $U_i, V_i \in k[x]$ de grados menores a $n_i - 1$ y a n_i, respectivamente, tales que $A_i U_i + B_i V_i = 1$. Definiendo

$$\begin{bmatrix} A_3 & -V_3 \\ B_3 & U_3 \end{bmatrix} :\equiv \begin{bmatrix} A_1 & -V_1 \\ B_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & -V_2 \\ B_2 & U_2 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

obtenemos un elemento $(A_3, B_3) \in \mathcal{F}_{n_1+n_2}(R)$. Escribimos

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{A_1}{B_1} \oplus \frac{A_2}{B_2}. \tag{30}$$

(Nótese, sin embargo, que la operación no es conmutativa).

Clasificación de formas cuadráticas

Dada $f = A/B \in \mathcal{F}_n(R)$, el cociente

$$\delta_f(x,y) = \delta_{A,B}(x,y) = \frac{A(x)B(y) - A(y)B(x)}{x - y} \tag{31}$$

es un polinomio en x, y. En el siglo XVIII, Bézout observó que los coeficientes c_{pq} en la expansión

$$\delta_f(x,y) = \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} x^{p-1} y^{q-1} \tag{32}$$

forman una matríz simétrica y no degenerada, pues mostró que

$$\det(c_{pq}) = (-1)^{n(n-1)/2} \operatorname{res}_{n,n}(A, B). \tag{33}$$

Denotamos la forma bilineal asociada como $\mathrm{Bez}_n(A, B)$ o $\mathrm{Bez}_n(f)$.

Teorema (Cazanave, 2012)

La función $f \mapsto ([\mathrm{Bez}(f)], \mathrm{res}(f))$, *es un isomorfismo de monoides*

$$[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1]_* \xrightarrow{\sim} W^s(k) \times_{k^\times/(k^\times)^2} k^\times, \tag{34}$$

donde $W^s(k)$ *es la estabilización del monoide de Witt de* k.

El teorema de cancelación de Witt implica que $W^s(k) = W(k)$, siempre que car $k \neq 2$.
En otras palabras: ¡las vueltas que da la esfera $S^{2,1}$ sobre sí misma se cuentan con formas cuadráticas! (y un valor extra).

Ejemplo

Las funciones racionales

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \qquad h(x) = \frac{x^2 - 2}{x}, \tag{35}$$

tienen

$$\delta_f(x, y) = 2 + 2xy, \quad \delta_g(x, y) = 1 + xy, \quad \delta_h(x, y) = 2 + xy, \tag{36}$$

así que, sobre $k = \mathbb{R}$ (o cualquier campo donde 2 sea un cuadrado)

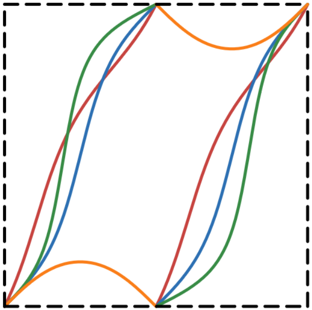
$$\mathrm{Bez}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \mathrm{Bez}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \mathrm{Bez}(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$$\operatorname{res}(f) = -4, \qquad \operatorname{res}(g) = -1, \qquad \operatorname{res}(h) = -2. \tag{38}$$

Por otro lado, consideremos la función

$$j(x) = \frac{x^2 + 1}{x}. \tag{39}$$

Tiene $\delta_j(x, y) = -1 + xy$, así que $\mathrm{Bez}(j) = \mathrm{diag}(-1, 1)$ y $\mathrm{res}(j) = 1$. Las gráficas de f, g, h, j en $S^1 \times S^1$ se ven como



en rojo, azul, verde y anaranjado, respectivamente.

4. La necesidad de $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$

Algunas cosas no cuadran del todo:

- ¿por qué la relación de homotopía elemental no es transitiva?
- ¿por qué $[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1]_*$ es solo un monoide y no un grupo?
- ¿y la teoría estable? ¿las suspensiones de las esferas?

La respuesta a (algunas de) nuestras súplicas:

$$\mathbf{Var}_k \to \mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}. \tag{40}$$

En $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$, la $\mathbb{A}^1$-homotopía es transitiva *a fortiori*. Además:

Teorema (Morel, 2012)

La función $f \mapsto ([\mathrm{Bez}(f)], \mathrm{res}(f))$, *induce un isomorfismo de grupos*

$$[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1]_*^{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{\sim} GW(k) \times_{k^\times/(k^\times)^2} k^\times, \tag{41}$$

donde $GW(k)$ *es el anillo de Grothendieck-Witt de* k.

Por último, el caso de $S^{2,1} = \mathbb{P}^1$ es el excepcional dentro de $\mathbf{Spc}_k^{\mathbb{A}^1}$:

Teorema (Morel, 2012)

Para cada $n \geq 2$, *la esfera* $S^{2n,n} = \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}$ *admite un isomorfismo*

$$[S^{2n,n}, S^{2n,n}]_*^{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{\sim} GW(k). \tag{42}$$

i.e. en el caso estable, la componente en $k^\times$ desaparece.

Ahora sí, las vueltas de $S^{2n,n}$ se cuentan con formas cuadráticas. El grupo de Grothendieck-Witt $GW(k)$ tiene una presentación sencilla. Como grupo abeliano, está generado por símbolos $\langle a\rangle$, con $a \in k^\times$, sujetos a las relaciones

$$\begin{cases} \langle ab^2\rangle = \langle a\rangle \\ \langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle a+b\rangle + \langle ab(a+b)\rangle \\ \langle a\rangle + \langle -a\rangle = \langle 1\rangle + \langle -1\rangle \end{cases} \tag{43}$$

El producto está dado por $\langle a\rangle\langle b\rangle = \langle ab\rangle$.
Por ejemplo,

$$GW(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \tag{44}$$

$$GW(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}[C_2]. \tag{45}$$

Para saber más

¿Cómo empezar?

- El "primer" de de Antieau y Elmanto [AE17]

Las referencias estándar para $\mathbb{A}^1$-homotopía son

- la presentación de Voevodsky en el ICM de 1998 [Voe98]
- el artículo de Morel y Voevodsky [MV99]
- las notas de Morel de un curso en el ICTP [Mor04]
- la presentación de Morel en el ICM de 2006 [Mor06]
- el libro de Morel [Mor12]

Sobre el contenido de esta plática:

- El artículo de Cazanave: [Caz12]

Sobre geometría $\mathbb{A}^1$-enumerativa:

- Los artículos de Kass y Wickelgren [KW19; KW21].

Gracias por su atención <3.

Bibliografía I

[Voe98] Vladimir Voevodsky. "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. 1. Berlin, 1998, pp. 579–604.

[MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes". In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 90 (1999), pp. 45–143. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__90__45_0.

[AE17] Benjamin Antieau and Elden Elmanto. "A primer for unstable motivic homotopy theory". In: *Surveys on recent developments in algebraic geometry*. Vol. 95. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 305–370. ISBN: 978-1-4704-3557-8. DOI: 10.1090/pspum/095/01637. arXiv: 1605.00929 [math.AG]. URL: https://doi.org/10.1090/pspum/095/01637.

Bibliografía II

[Mor04] Fabien Morel. "An introduction to A1-homotopy theory. Contemporary developments in algebraic K-theory 357–441, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent". In: *Theoret. Phys., Trieste* 70 (2004).

[Mor06] Fabien Morel. "$\mathbb{A}^1$-algebraic topology". In: *International Congress of Mathematicians. Vol. II*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 1035–1059. ISBN: 978-3-03719-022-7.

[Mor12] Fabien Morel. *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*. Vol. 2052. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012, pp. x+259. ISBN: 978-3-642-29513-3. DOI: 10.1007/978-3-642-29514-0.

[Caz12] Christophe Cazanave. "Algebraic homotopy classes of rational functions". eng. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 45.4 (2012), pp. 511–534. URL: http://eudml.org/doc/272113.

Bibliografía III

[KW19] Jesse Leo Kass and Kirsten Wickelgren. "The class of Eisenbud-Khimshiashvili-Levine is the local $\mathbb{A}^1$-Brouwer degree". In: *Duke Math. J.* 168.3 (2019), pp. 429–469. ISSN: 0012-7094,1547-7398. DOI: 10.1215/00127094-2018-0046.

[KW21] Jesse Leo Kass and Kirsten Wickelgren. "An arithmetic count of the lines on a smooth cubic surface". In: *Compos. Math.* 157.4 (Apr. 2021), pp. 677–709. ISSN: 0010-437X,1570-5846. DOI: 10.1112/s0010437x20007691.