

Clases de Chern

Geometría diferencial - 2024A

Jorge Alfredo Álvarez Contreras
Profesor: Diego Rodríguez Guzmán

Maestría en ciencias en matemáticas
Universidad de Guadalajara

Mayo 2024

- 1 Cohomología
- 2 Haces vectoriales
- 3 Clases de Chern
- 4 Ejemplos

1. Cohomología

Grupos de cohomología

Una teoría de cohomología H^\bullet le asigna a cada espacio topológico X una familia de grupos abelianos

$$H^0(X) \quad H^1(X) \quad H^2(X) \quad H^3(X) \quad H^4(X) \quad \dots$$

Grupos de cohomología

Una teoría de cohomología H^\bullet le asigna a cada espacio topológico X una familia de grupos abelianos

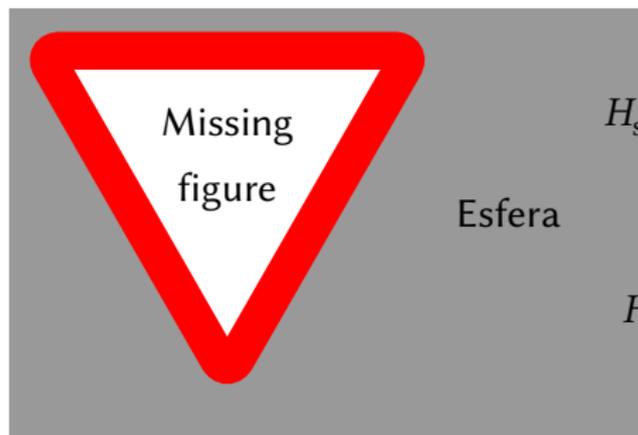
$$H^0(X) \quad H^1(X) \quad H^2(X) \quad H^3(X) \quad H^4(X) \quad \dots$$

Si S es una superficie, solo los primeros tres grupos son interesantes

$$H^0(X) \quad H^1(X) \quad H^2(X),$$

ya que $H^n(S) = 0$ para $n > 2$.

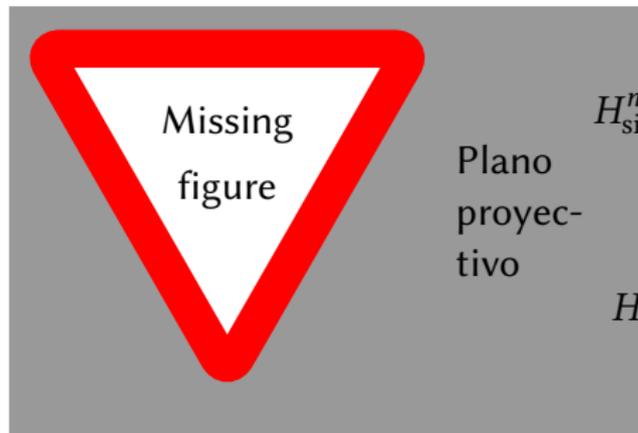
Cohomología de la esfera



$$H_{\text{sing}}^n(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \end{cases}$$

$$H_{\text{dR}}^n(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ \mathbb{R} & n = 2 \end{cases}$$

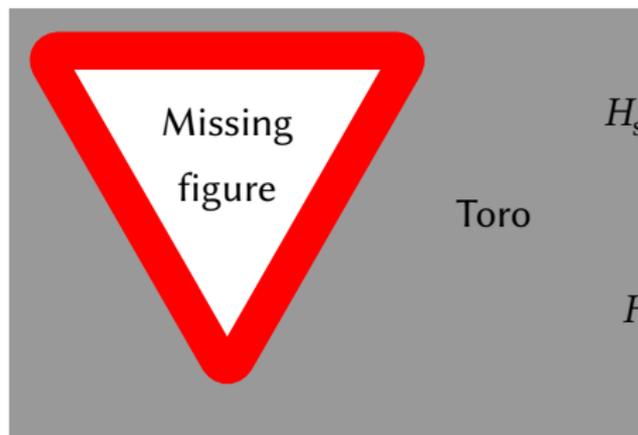
Cohomología del plano proyectivo



$$H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 2 \end{cases}$$

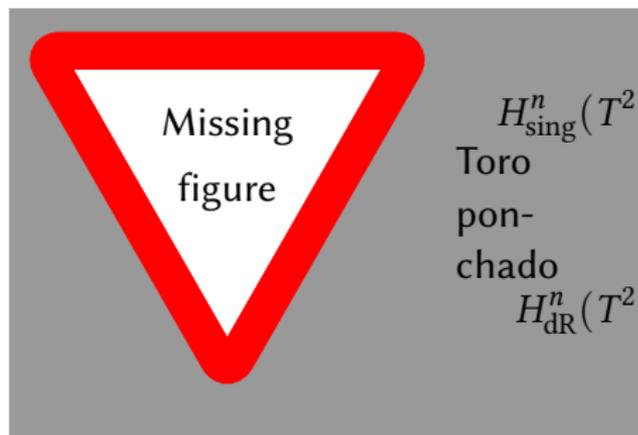
$$H_{\text{dR}}^n(\mathbb{R}P^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

Cohomología del toro



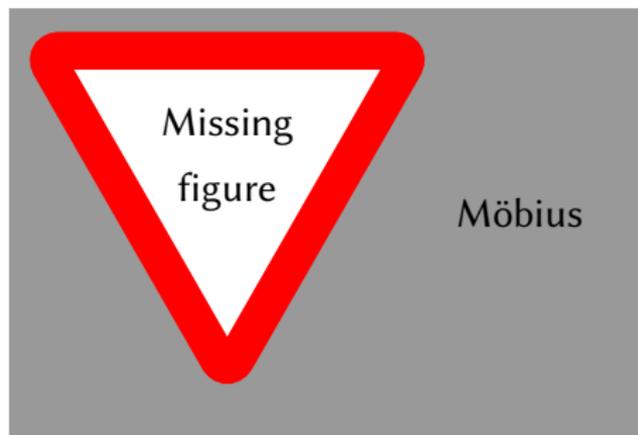
$$H_{\text{sing}}^n(T^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \end{cases}$$
$$H_{\text{dR}}^n(T^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & n = 1 \\ \mathbb{R} & n = 2 \end{cases}$$

Cohomología del toro ponchado



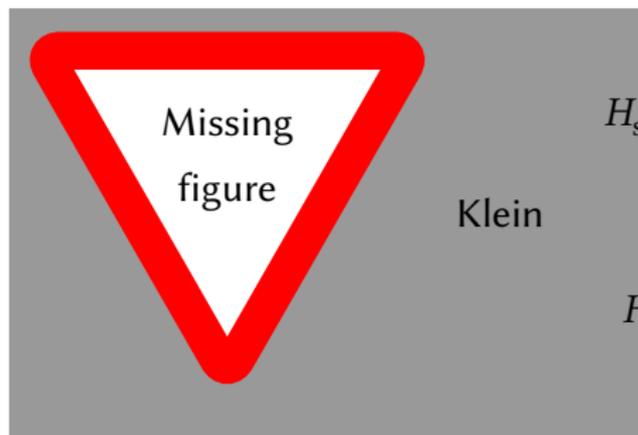
$$H_{\text{sing}}^n(T^2 - \{p\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$
$$H_{\text{dR}}^n(T^2 - \{p\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

Cohomología de la banda de Möbius



$$H_{\text{sing}}^n(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$
$$H_{\text{dR}}^n(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ \mathbb{R} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

Cohomología singular de la superficie (botella) de Klein



$$H_{\text{sing}}^n(K) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 2 \end{cases}$$

$$H_{\text{dR}}^n(K) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & n = 0 \\ \mathbb{R} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

2. Haces vectoriales

Haz tangente de la esfera

La esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$ tiene asociado el haz tangente

$$T\mathbb{S}^2 = \{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid x \cdot v = 0\}. \quad (1)$$

Es un haz vectorial real de rango 2 sobre \mathbb{S}^2 .

Haz tautológico del plano proyectivo real

El plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 es el espacio de rectas $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pasan por el origen. Tiene asociado el haz tautológico

$$\gamma^2 = \{(L, \mathbf{v}) \in \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \in L\}. \quad (2)$$

Es un haz vectorial real de rango 1 sobre \mathbb{RP}^2 .

Haz tautológico de la línea proyectiva compleja

La línea proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es el espacio de rectas complejas $L \subseteq \mathbb{C}^2$ que pasan por el origen. Topológicamente, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es una esfera \mathbb{S}^2 . Tiene asociado el haz tautológico

$$\eta^1 = \{(L, v) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in L\}. \quad (3)$$

Es un haz vectorial complejo de rango 1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Haz trivial sobre el toro

El haz trivial complejo de rango r sobre el toro T^2 (o sobre cualquier superficie) es el espacio

$$T^2 \times \mathbb{C}^r \quad (4)$$

equipado con la proyección canónica al primer factor.

Haz normal de la banda de Möbius

Dada una parametrización X de la banda Möbius en \mathbb{R}^3 , tenemos asociado el haz normal

$$N(M) = \{(x, \nu) \in M \times \mathbb{R}^3 \mid \nu \perp T_x M\}. \quad (5)$$

Este es un haz vectorial real de rango 1 sobre M .

3. Clases de Chern

Clases de Chern

Si $\pi : E \rightarrow S$ es un haz vectorial *complejo* de rango r sobre una superficie S , su (primera) clase de Chern es una clase de cohomología singular

$$c_1(E) \in H_{\text{sing}}^2(S). \quad (6)$$

Clases de Chern

Si $\pi : E \rightarrow S$ es un haz vectorial *complejo* de rango r sobre una superficie S , su (primera) clase de Chern es una clase de cohomología singular

$$c_1(E) \in H_{\text{sing}}^2(S). \quad (6)$$

Afortunadamente, para cualquier superficie conexa S conocemos la clase de isomorfismo de $H_{\text{sing}}^2(S)$:

	orientable	sí	no
compacta		\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
		0	0
		sí	no

Caso diferenciable

En el caso diferenciable, podemos considerar las clases de Chern en cohomología de de Rham:

$$c_1(E) \in H_{\text{dR}}^2(S) \quad (7)$$

donde, para S conexa, $H_{\text{dR}}^2(S)$ es isomorfo a

	orientable	sí	no
compacta		\mathbb{R}	0
	sí		
	no	0	0

Bueno, pero ¿cómo se calcula?

Si $\pi: E \rightarrow S$ es un haz complejo de rango n , una conexión es un operador \mathbb{C} -lineal $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(S, E)$ que cumple $\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma$. Si $U \subseteq S$ es un abierto trivializante, entonces $\Gamma(U, E) = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y la conexión ∇ determina una matriz de 1-formas complejas $\omega \in M_{n \times n}(\Omega^1(U, \mathbb{C}))$:

$$\nabla e_i = \omega^j_i e_j. \quad (8)$$

La curvatura de ∇ es la matriz (global) de 2-formas

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j. \quad (9)$$

Weil probó que, para cualquier conexión en E , se cumple

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{tr}(\Omega). \quad (10)$$

4. Ejemplos

Ejemplo: el haz tangente de la esfera

Consideremos la esfera \mathbb{S}^2 de radio r con la carta usual θ, ϕ . Los endomorfismos de $T\mathbb{S}^2$ y de $T^*\mathbb{S}^2$ dados como

$$\begin{cases} \mathcal{J}(e_\theta) = e_\phi, \\ \mathcal{J}(e_\phi) = -e_\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{J}^*(e^\theta) = -e^\phi, \\ \mathcal{J}^*(e^\phi) = e^\theta, \end{cases} \quad (11)$$

les dan estructuras complejas duales a $T\mathbb{S}^2$ y $T^*\mathbb{S}^2$, donde $e^\theta = r d\theta$, $e^\phi = r \sin \theta d\phi$ y e_θ, e_ϕ son bases duales. Nótese que \mathcal{J} es una rotación con respecto a la métrica Riemanniana

$$g = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = (e^\theta)^2 + (e^\phi)^2. \quad (12)$$

Se sigue que \mathcal{J}^* deja invariante a g . En este caso, decimos que g es hermítica con respecto a \mathcal{J} .

La métrica g determina la conexión de Levi-Civita, cuya 1-forma es

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta \cos \theta d\phi \\ \cot \theta d\phi & \cot \theta d\theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Dado que $e_\theta = \partial_\theta/r$ y $e_\phi = \partial_\phi/(r \sin \theta)$, la matriz de transición es

$$A = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/(r \sin \theta) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Así, con respecto al marco e_θ, e_ϕ , la conexión de Levi-Civita toma valores en $\mathfrak{so}(2)$:

$$A^{-1}\tilde{\omega}A + A^{-1}dA = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Bajo el isomorfismo usual $\mathfrak{so}(2) \cong \mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{C}$, obtenemos

$$\omega = i \cos \theta d\phi. \quad (16)$$

En este caso muy particular, tenemos $\nabla \mathcal{J} = 0$ (esto es muy fuerte: equivale a que \mathcal{J} sea integrable). Se sigue que ω es la 1-forma correspondiente a una conexión compleja en E con curvatura

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = -i \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \quad (17)$$

Del teorema de Weil, se sigue que

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \Omega = \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \quad (18)$$

Nótese que

$$\int_{\mathbb{S}^2} c_1(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 2, \quad (19)$$

Gracias <3.

Bibliografía I

- [Mor01] Shigeyuki Morita. “Geometry of differential forms”. In: 2001. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125192125>.

Un vistazo de generalidad

En general, si $\pi : E \rightarrow X$ es un haz vectorial complejo de rango r de rango r , entonces hay clases de Chern

$$c_0(E) \in H^0(X)$$

$$c_1(E) \in H^2(X)$$

$$c_2(E) \in H^4(X)$$

$$c_3(E) \in H^6(X)$$

\vdots

$$c_r(E) \in H^{2r}(X)$$

y, de hecho, $c_0(E) = 1$ para cualquier haz sobre cualquier espacio.