Trazas generalizadas para álgebras de intersección completa

Seminario de álgebra

Jorge Alfredo Álvarez Contreras

CUCEI - UDG

7 de marzo de 2025

Sobre trazas para intersecciones completas

Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten

Von *Günter Scheja* in Bochum und *Uwe Storch* in Osnabrück

Heinrich Behnke zum 75. Geburtstag

Einleitung

Seien K ein Körper und L eine endliche kommutative Frobeniusalgebra über K. Der L-Modul $\mathrm{Hom}_K(L, K)$ ist dann zu L isomorph. Es gibt also ein Basiselement α in $\mathrm{Hom}_K(L, K)$. Insbesondere ist die Spur Sp_K^L ein Vielfaches von α: Es gibt ein eindeutig bestimmtes $s \in L$ mit $\mathrm{Sp}_K^L = s\alpha$. Genau dann ist s eine Einheit in L, wenn L über K unverzweigt ist, also endliches direktes Produkt endlicher separabler Körpererweiterungen von K ist. In diesem Fall ist der sich in natürlicher Weise anbietende Homomorphismus Sp_K^L eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(L, K)$. Generell ist es nicht möglich, in natürlicher Weise eine „verallgemeinerte Spurfunktion" α als Basis von $\mathrm{Hom}_K(L, K)$ anzugeben. Ist jedoch L ein vollständiger Durchschnitt über K, so läßt sich zu einer vorgelegten Darstellung von L als solcher vollständiger Durchschnitt in natürlicher Weise ein Basiselement von $\mathrm{Hom}_K(L, K)$ konstruieren.

Figure: Scheja-Storch (1973)

Intersecciones completas sobre un campo

Definición (Intersección completa sobre un campo)

Sea k un campo. Una k-álgebra de tipo finito B, con dimensión de Krull $d = \dim B$, es una intersección completa sobre k si hay un morfismo suprayectivo

$$\rho\colon k[U_1, \dots, U_d, X_1, \dots, X_n] \to B \tag{1}$$

cuyo núcleo está generado por n polinomios, digamos $t_1, \dots, t_n$.

Propiedades a generalizar

Sin perder generalidad (normalización de Noether), podemos suponer que la restricción de ρ

$$\rho|_A \colon A \to B \tag{2}$$

al álgebra $A = k[U_1, \ldots, U_d]$ es un morfismo inyectivo y que, además,

$$\rho \colon A[X_1, \ldots, X_n] \to B \tag{3}$$

presenta a B como A-álgebra finita. Además, $\ker \rho$ está generado por n elementos.

Intersecciones completas relativas

Definición (Álgebra de intersección completa)

Sean A un anillo Noetheriano y B una A-álgebra regular y finita. Una presentación de B como intersección completa sobre A es:

- *un morfismo suprayectivo $P \xrightarrow{\rho} B$, donde $P = A[X]$ es el anillo de polinomios sobre A en n variables*
- *equipado con n elementos $t_1, \ldots, t_n \in \ker \rho$ tales que*

$$(t_1, \ldots, t_n)P_{\mathfrak{m}} = \ker \rho_{\mathfrak{m}} \tag{4}$$

para cada ideal máximo $\mathfrak{m} \subseteq P$ que contiene a $\ker \rho$.

Intersecciones completas son relativas

En caso clásico, B es finita sobre una subálgebra $A \subseteq B$ y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n) \to P \xrightarrow{\rho} B \to 0, \tag{5}$$

donde $P = A[X_1, \ldots, X_n]$.

Intersecciones completas son relativas

En caso clásico, B es finita sobre una subálgebra $A \subseteq B$ y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n) \to P \xrightarrow{\rho} B \to 0, \tag{5}$$

donde $P = A[X_1, \ldots, X_n]$. Localizando esta sucesión en cualquier ideal máximo $\mathfrak{m} \subseteq P$ con $\ker \rho \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n)P_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}} \to 0, \tag{6}$$

así que B es intersección completa sobre A, en el sentido relativo.

Intersecciones completas son relativas

En caso clásico, B es finita sobre una subálgebra $A \subseteq B$ y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n) \to P \xrightarrow{\rho} B \to 0, \tag{5}$$

donde $P = A[X_1, \ldots, X_n]$. Localizando esta sucesión en cualquier ideal máximo $\mathfrak{m} \subseteq P$ con $\ker \rho \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n)P_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}} \to 0, \tag{6}$$

así que B es intersección completa sobre A, en el sentido relativo. Excepto que...

Intersecciones completas son relativas

En caso clásico, B es finita sobre una subálgebra $A \subseteq B$ y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (t_1, \dots, t_n) \to P \xrightarrow{\rho} B \to 0, \tag{5}$$

donde $P = A[X_1, \dots, X_n]$. Localizando esta sucesión en cualquier ideal máximo $\mathfrak{m} \subseteq P$ con $\ker \rho \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos

$$0 \to (t_1, \dots, t_n)P_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}} \to 0, \tag{6}$$

así que B es intersección completa sobre A, en el sentido relativo. Excepto que... ¿qué pasa con la condición de regularidad?

Intersecciones completas son relativas

En caso clásico, B es finita sobre una subálgebra $A \subseteq B$ y tenemos una sucesión exacta

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n) \to P \xrightarrow{\rho} B \to 0, \tag{5}$$

donde $P = A[X_1, \ldots, X_n]$. Localizando esta sucesión en cualquier ideal máximo $\mathfrak{m} \subseteq P$ con $\ker \rho \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos

$$0 \to (t_1, \ldots, t_n)P_\mathfrak{m} \to P_\mathfrak{m} \xrightarrow{\rho_\mathfrak{m}} B_\mathfrak{m} \to 0, \tag{6}$$

así que B es intersección completa sobre A, en el sentido relativo.
Excepto que... ¿qué pasa con la condición de regularidad?
R. No sé.

Ejemplos

- $B = k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ no es una intersección completa: es finita sobre $A = k$, pero el ideal correspondiente en $k[X, Y]$ no se puede generar con 2 elementos.

Ejemplos

- $B = k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ no es una intersección completa: es finita sobre $A = k$, pero el ideal correspondiente en $k[X, Y]$ no se puede generar con 2 elementos.
- $B = k[X, Y, Z]/(ZX - Y^2, YZ - X^3, YX^2 - Z^2)$ no es una intersección completa: es finita sobre $A = k[X]$, pero el ideal correspondiente en $A[Y, Z]$ no se puede generar con 2 elementos.

Ejemplos

- $B = k[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$ no es una intersección completa: es finita sobre $A = k$, pero el ideal correspondiente en $k[X,Y]$ no se puede generar con 2 elementos.
- $B = k[X,Y,Z]/(ZX - Y^2, YZ - X^3, YX^2 - Z^2)$ no es una intersección completa: es finita sobre $A = k[X]$, pero el ideal correspondiente en $A[Y,Z]$ no se puede generar con 2 elementos.
- $B = k[X,Y,Z]/(Z - XY, Y - X^2)$ es una intersección completa sobre $A = k[X]$: su ideal en $A[Y,Z]$ se puede generar con 2 elementos.

- Si k es un campo y L una extensión finita separable, entonces $L = k[X]/(f(X))$, donde $f(x)$ es un polinomio irreducible, asì que L es intersección completa sobre k.

- Si k es un campo y L una extensión finita separable, entonces $L = k[X]/(f(X))$, donde $f(x)$ es un polinomio irreducible, asì que L es intersección completa sobre k.
- Si $k = \mathbb{F}_p(X)$ y $L = \mathbb{F}_p(Y)$, el morfismo $k \to L$ dado por $X \mapsto Y^p$ es una extensión finita de grado p, pues $Y \in L$ tene polinomio mínimo $f(T) = T^p - X$ sobre k, así que $L = k[T]/(f(T))$. La extensión no es separable, pero es una intersección completa.

Dualidad

Lema

Una A-álgebra de intersección completa es proyectiva.

Gracias a este lema, tenemos ciertos resultados de dualidad.

Dualidad

Lema

Una A-álgebra de intersección completa es proyectiva.

Gracias a este lema, tenemos ciertos resultados de dualidad. Recordemos que, si M es un A-módulo proyectivo y finito, su módulo dual $M^* = \hom_A(M, A)$ satisface

$$M^* \otimes_A N \cong \hom_A(M, N) \tag{7}$$

$$M \otimes_A N \cong \hom_A(M^*, N). \tag{8}$$

Construcción

Recordemos que $\rho\colon P \to B$ está equipado con $t_1, \ldots, t_n$.

Construcción

Recordemos que $\rho\colon P \to B$ está equipado con $t_1, \ldots, t_n$. Tenemos

$$\begin{tikzcd} P \otimes_A P \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho"] & P \arrow[d, "\rho"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\mu"] & B. \end{tikzcd} \tag{9}$$

Construcción

Recordemos que $\rho\colon P \to B$ está equipado con $t_1, \dots, t_n$. Tenemos

$$\begin{tikzcd} P \otimes_A P \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho"] & P \arrow[d, "\rho"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\mu"] & B. \end{tikzcd} \tag{9}$$

$$t_i \otimes 1 - 1 \otimes t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X_j \otimes 1 - 1 \otimes X_j), \qquad \text{con } a_{ij} \in P \otimes_A P. \tag{10}$$

Construcción

Recordemos que $\rho\colon P \to B$ está equipado con $t_1, \ldots, t_n$. Tenemos

$$\begin{tikzcd} P \otimes_A P \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho"] & P \arrow[d, "\rho"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\mu"] & B. \end{tikzcd} \tag{9}$$

$$t_i \otimes 1 - 1 \otimes t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X_j \otimes 1 - 1 \otimes X_j), \qquad \text{con } a_{ij} \in P \otimes_A P. \tag{10}$$

Entonces $\ker \mu$ es el anulador del elemento

$$\Delta = (\rho \otimes \rho)(\det(a_{ij})) \in B \otimes_A B \tag{11}$$

y el anulador de $\ker \mu$ es el generado por Δ.

Como B es proyectivo, tenemos el isomorfismo

$$\kappa\colon B \otimes_A B \to \hom_A(B^*, B), \tag{12}$$

el cual se restringe a un B-isomorfismo

$$\kappa\colon (B \otimes_A B)\Delta \to \hom_B(B^*, B), \tag{13}$$

pues el anulador de $\ker \mu$ está generado por Δ.

Como B es proyectivo, tenemos el isomorfismo

$$\kappa\colon B \otimes_A B \to \hom_A(B^*, B), \tag{12}$$

el cual se restringe a un B-isomorfismo

$$\kappa\colon (B \otimes_A B)\Delta \to \hom_B(B^*, B), \tag{13}$$

pues el anulador de $\ker \mu$ está generado por Δ. El elemento correspondiente a Δ es una función B-lineal

$$\Theta = \kappa(\Delta)\colon B^* \to B \tag{14}$$

El lado derecho de (13) es un B-módulo libre de rango 1 generado por Θ, así que Θ es un isomorfismo y podemos usarlo para definir una forma A-bilineal no degenerada sobre B, que denotamos β.

Aplicación geométrica

Consideremos un k-morfismo finito $f\colon \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$, con componentes $f_1(X), \ldots, f_n(X)$, es decir, el morfismo de k-álgebras $k[Y] \to k[X]$ que le corresponde, manda $Y_i \mapsto f_i(X)$. Esto dota a $B = k[Y]$ con la estructura de álgebra de intersección completa sobre $A = k[X]$. En efecto,

$$k[X] \cong k[Y][X]/(t_1, \ldots, t_n), \quad \text{donde } t_i = Y_i - f_i(X). \tag{15}$$

Aplicación geométrica

La construcción de Scheja-Storch nos da una forma $k[Y]$-bilineal

$$\beta \colon k[X] \otimes_{k[Y]} k[X] \to k[Y]. \tag{16}$$

Aplicación geométrica

La construcción de Scheja-Storch nos da una forma $k[Y]$-bilineal

$$\beta\colon k[X] \otimes_{k[Y]} k[X] \to k[Y]. \tag{16}$$

Tomando la fibra sobre un punto cerrado $y \in \mathbb{A}^n_k$, obtenemos

$$\beta_y\colon Q_y \otimes_{k(y)} Q_y \to k(y), \tag{17}$$

donde $Q_y = k[X] \otimes_{k[Y]} k(y)$ es el álgebra de $f^{-1}(y)$.

Aplicación geométrica

La construcción de Scheja-Storch nos da una forma $k[Y]$-bilineal

$$\beta\colon k[X] \otimes_{k[Y]} k[X] \to k[Y]. \tag{16}$$

Tomando la fibra sobre un punto cerrado $y \in \mathbb{A}^n_k$, obtenemos

$$\beta_y\colon Q_y \otimes_{k(y)} Q_y \to k(y), \tag{17}$$

donde $Q_y = k[X] \otimes_{k[Y]} k(y)$ es el álgebra de $f^{-1}(y)$. Tenemos

$$Q_y \cong R_{x_1} \times \cdots \times R_{x_r}, \tag{18}$$

donde $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ son los puntos de la fibra sobre y.

Aplicación geométrica

La construcción de Scheja-Storch nos da una forma $k[Y]$-bilineal

$$\beta\colon k[X] \otimes_{k[Y]} k[X] \to k[Y]. \tag{16}$$

Tomando la fibra sobre un punto cerrado $y \in \mathbb{A}^n_k$, obtenemos

$$\beta_y\colon Q_y \otimes_{k(y)} Q_y \to k(y), \tag{17}$$

donde $Q_y = k[X] \otimes_{k[Y]} k(y)$ es el álgebra de $f^{-1}(y)$. Tenemos

$$Q_y \cong R_{x_1} \times \cdots \times R_{x_r}, \tag{18}$$

donde $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ son los puntos de la fibra sobre y. Si y es un k-punto y $f(x) = y$, entonces restringimos

$$\gamma_x\colon R_x \otimes_k R_x \to k. \tag{19}$$

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$.

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$.

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema (Morel, 2002)

$$\deg^{\mathbb{A}^1} : [\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}] \xrightarrow{\cong} \mathrm{GW}(k) \tag{20}$$

El anillo de formas cuadráticas

Sea $\mathrm{GW}(k)$ el grupo de Grothendieck de formas cuadráticas sobre k. Algunos ejemplos son

- $\mathrm{GW}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{p^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ para $p \neq 2$,
- $\mathrm{GW}(\mathbb{F}_{2^n}) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema (Morel, 2002)

$$\deg^{\mathbb{A}^1} : [\mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}] \xrightarrow{\cong} \mathrm{GW}(k) \tag{20}$$

Teorema (Kass-Wickelgren, 2019)

Si x es un valor aislado en la fibra $f^{-1}(y)$ sobre $y \in \mathbb{A}^n_k(k)$,

$$\deg_x^{\mathbb{A}^1}(f) = \textit{la clase de } w_x(f) \textit{ en } \mathrm{GW}(k). \tag{21}$$

Si $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ es finita, la descomposición de espacios cuadráticos sobre k

$$Q_y \cong R_{x_1} \times \cdots \times R_{x_r} \tag{22}$$

es ortogonal, así que obtenemos una identidad en $\mathrm{GW}(k)$

$$[\beta_y] = [\gamma_{x_1}] + \cdots + [\gamma_{x_r}]. \tag{23}$$

Si $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ es finita, la descomposición de espacios cuadráticos sobre k

$$Q_y \cong R_{x_1} \times \cdots \times R_{x_r} \tag{22}$$

es ortogonal, así que obtenemos una identidad en $\mathrm{GW}(k)$

$$[\beta_y] = [\gamma_{x_1}] + \cdots + [\gamma_{x_r}]. \tag{23}$$

En vista de los resultados de Kass y Wickelgren, tenemos

$$[\beta_y] = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x^{\mathbb{A}^1}(f). \tag{24}$$

Si $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ es finita, la descomposición de espacios cuadráticos sobre k

$$Q_y \cong R_{x_1} \times \cdots \times R_{x_r} \tag{22}$$

es ortogonal, así que obtenemos una identidad en $\mathrm{GW}(k)$

$$[\beta_y] = [\gamma_{x_1}] + \cdots + [\gamma_{x_r}]. \tag{23}$$

En vista de los resultados de Kass y Wickelgren, tenemos

$$[\beta_y] = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x^{\mathbb{A}^1}(f). \tag{24}$$

Proposición

Para cualquier par de k-puntos y, y', tenemos $[\beta_y] = [\beta_{y'}]$.

Esto nos indica que la clase $[\beta_y]$ es un invariante de f. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición

Si $f\colon \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ es la restricción de un morfismo finito $F\colon \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$, entonces tenemos $F(\mathbb{P}^{n-1}_k) \subseteq F(\mathbb{P}^{n-1}_k)$, así que F induce un morfismo $\tilde{F}\colon \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n/\mathbb{P}^{n-1}$ y, para cualquier k-punto $y \in \mathbb{A}^n_k(k)$ se satisface

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)} \deg_x^{\mathbb{A}^1}(f) = \deg^{\mathbb{A}^1}(\tilde{F}). \tag{25}$$

Gracias por su atención.

Bibliografía I

[Vak24] Ravi Vakil. “The rising sea: Foundations of algebraic geometry”. In: *preprint* (2024).

[Lur24] Jacob Lurie. *Kerodon*. 2024. URL: https://kerodon.net.

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher algebra*. 2017. URL: http://www.math.harvard.edu/lurie.

[Mil08] James S. Milne. “Lectures on etale cohomology”. In: 2008. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117427419.

[Dug04] Daniel Dugger. *Notes on the Milnor conjectures*. 2004. arXiv: math/0408436 [math.AT].

Bibliografía II

[Mil80] James S. Milne. *Étale cohomology*. Vol. No. 33. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980, pp. xiii+323. ISBN: 0-691-08238-3. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpmbk1.

[AE17] Benjamin Antieau and Elden Elmanto. "A primer for unstable motivic homotopy theory". In: *Surveys on recent developments in algebraic geometry*. Vol. 95. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 305–370. ISBN: 978-1-4704-3557-8. DOI: 10.1090/pspum/095/01637. arXiv: 1605.00929 [math.AG]. URL: https://doi.org/10.1090/pspum/095/01637.

Bibliografía III

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xii + 209. ISBN: 0-8218-1359-5.

[DHI04] Daniel Dugger, Sharon Hollander, and Daniel C. Isaksen. "Hypercovers and simplicial presheaves". In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 136.1 (2004), pp. 9–51. ISSN: 0305-0041,1469-8064. DOI: 10.1017/S0305004103007175. arXiv: math/0205027 [math.AT]. URL: https://doi.org/10.1017/S0305004103007175.

Bibliografía IV

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Vol. 170. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009, pp. xviii+925. ISBN: 978-0-691-14049-0. DOI: 10.1515/9781400830558. arXiv: math/0608040 [math.CT]. URL: https://doi.org/10.1515/9781400830558.

[Mor12] Fabien Morel. *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*. Vol. 2052. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012, pp. x+259. ISBN: 978-3-642-29513-3. DOI: 10.1007/978-3-642-29514-0.

Bibliografía V

[KW19] Jesse Leo Kass and Kirsten Wickelgren. "The class of Eisenbud-Khimshiashvili-Levine is the local $\mathbb{A}^1$-Brouwer degree". In: *Duke Math. J.* 168.3 (2019), pp. 429–469. ISSN: 0012-7094,1547-7398. DOI: 10.1215/00127094-2018-0046.

[KW21] Jesse Leo Kass and Kirsten Wickelgren. "An arithmetic count of the lines on a smooth cubic surface". In: *Compos. Math.* 157.4 (Apr. 2021), pp. 677–709. ISSN: 0010-437X,1570-5846. DOI: 10.1112/s0010437x20007691.

Bibliografía VI

[AHW17] Aravind Asok, Marc Hoyois, and Matthias Wendt. "Affine representability results in $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, I: vector bundles". In: *Duke Math. J.* 166.10 (July 2017), pp. 1923–1953. ISSN: 0012-7094,1547-7398. DOI: 10.1215/00127094-0000014X. URL: https://doi.org/10.1215/00127094-0000014X.

[Voe98] Vladimir Voevodsky. "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. 1. Berlin, 1998, pp. 579–604.

[MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes". In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 90 (1999), pp. 45–143. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__90__45_0.

Bibliografía VII

[Mor06] Fabien Morel. "$\mathbb{A}^1$-algebraic topology". In: *International Congress of Mathematicians. Vol. II*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 1035–1059. ISBN: 978-3-03719-022-7.

[BSS09] Jean-Paul Brasselet, José Seade, and Tatsuo Suwa. *Vector fields on singular varieties*. Vol. 1987. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009, pp. xx+225. ISBN: 978-3-642-05204-0. DOI: 10.1007/978-3-642-05205-7. URL: https://doi-org.biblio.cimat.remotexs.co/10.1007/978-3-642-05205-7.

Bibliografía VIII

[MVW06] C. Mazza, V. Voevodsky, and C.A. Weibel. *Lecture Notes on Motivic Cohomology*. Clay mathematics monographs. American Mathematical Society, 2006. ISBN: 9780821853214. URL: https://www.claymath.org/wp-content/uploads/2022/03/Motivic-Cohomology.pdf.

[Mor04a] Fabien Morel. "An introduction to A1-homotopy theory". In: *ICTP Lecture Notes*. Contemporary developments in algebraic K-theory 70.XV (2004). Theoret. Phys., Trieste, Abdus Salam Int. Cent, pp. 357–441.

Bibliografía IX

[Caz12] Christophe Cazanave. “Algebraic homotopy classes of rational functions”. eng. In: *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* 45.4 (2012), pp. 511–534. URL: http://eudml.org/doc/272113.

[ELT77] David Eisenbud, Harold I. Levine, and Bernard Teissier. “An Algebraic Formula for the Degree of a C^∞ Map Germ / Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités”. In: *Annals of Mathematics* 106.1 (1977), pp. 19–44. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1971156 (visited on 03/07/2025).

[Eis78] David Eisenbud. “An algebraic approach to the topological degree of a smooth map”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 84.5 (1978), pp. 751–764.

Bibliografía X

[SS75] Uwe Storch and Günter Scheja. "Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten.". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1975 (1975), pp. 174–190. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125759112.

[Ayo07a] Joseph A. Ayoub. "Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I)". In: *Astérisque* (2007). URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:170927114.

Bibliografía XI

[Ayo07b] Joseph A. Ayoub. "Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (II)". In: *Astérisque* (2007). URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:265579835.

[Lam05] Tsit-Yuen Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*. Vol. 67. American Mathematical Soc., 2005.

[Mal23] Cary Malkiewich. "Spectra and stable homotopy theory (draft version, first 6 chapters)". In: (2023).

[Hoy14] Marc Hoyois. "A quadratic refinement of the Grothendieck–Lefschetz–Verdier trace formula". In: *Algebraic & Geometric Topology* 14 (Dec. 2014), pp. 3603–3658. DOI: 10.2140/agt.2014.14.3603.

Bibliografía XII

[Mor04b] Fabien Morel. “On the Motivic π_0 of the Sphere Spectrum”. In: *Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory*. Ed. by J. P. C. Greenlees. Dordrecht: Springer Netherlands, 2004, pp. 219–260. ISBN: 978-94-007-0948-5.